Eine geometrische Deutung der Fundamentalinvariante des FRANKschen Kegelschnittnetzes

Tölke, Jürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 26, 1976,
S.123-126

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eine geometrische Deutung der Fundamentalinvariante des FRANKschen Kegelschnittnetzes

Von **Jürgen Tölke,** Siegen

Vorgelegt von **Hans Robert Müller**

1. Nach *H. Frank* [3] ist mit einer ebenen Projektivbewegung an jeder Parameterstelle ein *Kegelschnittnetz* N invariant verbunden. Betrachtet man projektive Bewegungen $\beta(t)$, bei denen die Polkurven im Parameterintervall ein reelles Kurventripel bilden, und bezeichnet σ_i den zum Pol P_i $(i = 1, 2, 3)$ gehörenden Eigenwert der infinitesimalen Abbildungsmatrix an der betrachteten Parameterstelle, so gilt: *Die Lage des Zielpunktes* Z *des Netzkegelschnittes* q_z *ist durch die Fundamentalinvariante*

$$F(t) := \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_2} = DV_{q_z}(P_1 P_3; P_2 Z)$$

charakterisiert [6].

Wir zeigen hier eine weitere Deutung dieser für Unterscharen der Projektivbewegungen $\beta(t)$ fundamentalen absoluten Invarianten $F(t)$ vermöge der (j)-*Bahnprojektivnormalen* a_j eines allgemeinen Bahnkurvenpunktes X. Bezeichnet t_x die Bahntangente der durch X gehenden Bahnkurve, so besteht die Beziehung

$$F(t) = DV(a_1 a_3; a_2 t_x).$$

Mit diesem die Bahnaffinnormale [1, 5] verallgemeinernden Begriff der (j)-Bahnprojektivnormalen gelingt ferner die Übertragung eines Satzes von *G. Lochs* [5]: *Die* (j)-*Kreispunktkurve 1. Art einer Projektivbewegung* $\beta(t)$ *ist der Ort jener Punkte, deren* (j)-*Bahnnormale zugleich* (j)-*Bahnprojektivnormale ist.*

2. Bekanntlich gibt es nach *H. Frank* in erster Differentiationsordnung sechs verschiedene Typen ebener Projektivbewegungen [3]. Wir legen im folgenden jenen Typ zugrunde, bei dem an jeder Parameterstelle drei linear unabhängige reelle Pole P_j $(j = 1, 2, 3)$ existieren, und sprechen von *projektiven Bewegungen* $\beta(t)$.

Gelten für die *Rastpolbahnen* Ableitungsgleichungen der Form

(1) $$\dot{p}_i(t) = \beta_i^j(t)\, p_j(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta_i^{(i)} = 0,$$

so wird die durch

$$x(t) := x^i(t)\, p_i(t)$$

gehende *Bahnkurve* [3, 6] durch das Differentialgleichungssystem

(2) $$\dot{x} = \rho x + \mathring{x} \quad \text{mit} \quad \mathring{x} := \sigma_{(i)} x^i p_i$$

erfaßt, worin $\sigma_i = \sigma_i(t)$ die *Eigenwerte* der in Normalform angenommenen *infinitesimalen Abbildungsmatrix* bezeichnet. Die aus den Halbinvarianten $(\sigma_i - \sigma_j)$ gebildete absolute *Fundamentalinvariante*

(3) $$F(t) := \frac{\sigma_1(t) - \sigma_2(t)}{\sigma_3(t) - \sigma_2(t)}$$

besitzt nach [6] mehrere geometrische Deutungen und spielt eine entscheidende Rolle beim Übergang zu *Unterscharen* von $\beta(t)$. Eine dieser Deutungen fußt auf dem *Frankschen Kegelschnittnetz N*. Nach *H. Frank* [3, S. 20f.] wird jedem allgemeinen Punkt Z vermöge

$$\det(z, x, \dot{x}) = 0$$

ein *Kegelschnitt* q_Z eindeutig derart zugeordnet, daß alle Bahntangenten der Bewegung $\beta(t)$ in den Punkten von q_Z durch Z gehen. Z heißt *Zielpunkt* und die Menge der Kegelschnitte q_Z bildet an jeder Parameterstelle ein Kegelschnittnetz N. Hiermit gilt nach [6, S. 193]: *Für alle Kegelschnitte q_Z des Netzes N besitzt das Punktequadrupel* $(P_1 P_3 P_2 Z)$ *dasselbe Doppelverhältnis, nämlich die Fundamentalinvariante* $F(t)$.

3. Für die hier betrachteten Projektivbewegungen $\beta(t)$ lassen sich *zwei* wesentlich verschiedene *Krümmungstheorien* entwickeln, die genau für die pseudoeuklidische Kinematik äquivalent sind. Ist $S_j(t, x)$ der die Bahnkurve $x(t)$ oskulierende Kegelschnitt durch die Momentanpole P_i, P_k — also *der kinematische* (j)-*Schmiegkegelschnitt* —, so heißt der Pol $M_j(t, x)$ der momentanen Fixgeraden P_i, P_k am Kegelschnitt $S_j(t, x)$ der (j)-*Krümmungsmittelpunkt 1. Art.* Seine Verbindungsgerade $b_j(t, x)$ mit dem Bahnkurvenpunkt X wird die (j)-*Bahnnormale* der Bahnkurve $x(t)$ an der betrachteten Parameterstelle genannt. Bezeichnet t_x die Bahntangente von $x(t)$, so läßt sich die (j)-Bahnnormale vermöge der Relation [6, S. 185]

$$DV(P_{j+1}X, P_{j+2}X; t_x, b_j(t, x)) = -1$$

sofort konstruieren. Der Hüllpunkt des Polstrahles $P_j X$ heißt der (j)-*Krümmungsmittelpunkt 2. Art.*

4. Wir kommen nun zur angekündigten Deutung der Fundamentalinvarianten. Dazu betrachten wir nicht auf den momentanen Fixgeraden gelegene Bahnkurvenpunkte X, die an der betrachteten Parameterstelle *keinen* Wendepunkt ihrer Bahnkurve durchlaufen, für die also $\det(x, \dot{x}, \ddot{x}) \neq 0$ gilt. Bestimmen wir uns das die Bahnkurve $x(t)$ an der betrachteten Parameterstelle *hyperoskulierende Kegelschnittbüschel* $H(t, x)$. Mit

$$\ddot{x} = (\dot{\rho} - \rho^2)x + 2\rho\dot{x} + \overset{\circ\circ}{x}, \quad \overset{\circ\circ}{x} := \{(\dot{\sigma}_{(i)} + \sigma^2_{(i)})x^i + (\sigma_{(j)} - \sigma_{(i)})\beta^i_j x^j\} p_i \tag{4}$$

ergibt sich für $H(t, x)$ in der *lokalen Basis* $(\det(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \det(x, \mathring{x}, \overset{\circ\circ}{x}))$

$$y := y_0 x + y_1 \mathring{x} + y_2 \overset{\circ\circ}{x} \tag{5}$$

die Darstellung

$$y_1^2 - \lambda y_2^2 - 2 y_0 y_2 + \frac{2}{3} \frac{\det(x, \mathring{x}, \overset{\circ\circ\circ}{x})}{\det(x, \mathring{x}, \overset{\circ\circ}{x})} y_1 y_2 = 0. \tag{6}$$

Dieses Kegelschnittbüschel $H(t, x)$ enthält drei *Kegelschnitte* $P_j(t, x)$ ($j = 1, 2, 3$), *welche die momentane Fixgerade* $P_i P_k$ *berühren* ($j \neq i \neq k \neq j$). Für den sie festlegenden Büschelparameter λ_j gilt

$$(7) \qquad \lambda_j = 2\frac{A_i B_k - A_k B_i}{B_i C_k - B_k C_i} - \left[\frac{A_i C_k - A_k C_i}{B_i C_k - B_k C_i} - \frac{1}{3}\frac{\det(x, \dot{x}, \dddot{x})}{\det(x, \dot{x}, \ddot{x})}\right]^2,$$

wobei wir abkürzend mit $e := \det(x, \dot{x}, \ddot{x})$

$$(8) \qquad e A_i := \det(p_i, \dot{x}, \ddot{x}), \qquad e B_i := \det(x, p_i, \ddot{x}), \qquad e C_i := \det(x, \dot{x}, p_i)$$

gesetzt haben. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen über X ist der Ausdruck für λ_j sinnvoll, da ersichtlich

$$e(B_i C_k - B_k C_i) = (-1)^{j+1} x^j \quad \text{für } i < k.$$

Die Verbindungsgerade $a_j(t, x)$ des Berührpunktes von $P_j(t, x)$ mit der momentanen Fixgeraden $P_i P_k$ mit dem Bahnkurvenpunkt X heiße die (kinematische) (j)-*Bahnprojektivnormale* der Bahnkurve $x(t)$ an der betrachteten Parameterstelle. Dies ist insofern sinnvoll, als für *affine Bewegungen* mit $P_i P_k$ als Ferngerade die Gerade $a_j(t, x)$ ersichtlich die zugehörige *Bahnaffinnormale* von $x(t)$ ist. Als Darstellung der (j)-Bahnprojektivnormale ergibt sich im lokalen Koordinatensystem (5)

$$(9) \qquad a_1^j z_2 - a_2^j z_1 = 0 \quad \text{mit} \quad a_1^j : a_2^j = -\sigma_j - \tfrac{1}{3} e^{-1} \det(x, \dot{x}, \dddot{x}),$$

d. h. es gilt: *Die Fundamentalinvariante* $F(t)$ *einer Projektivbewegung* $\beta(t)$ *läßt sich an der Parameterstelle* t *als Doppelverhältnis der drei Bahnprojektivnormalen jedes allgemeinen Bahnkurvenpunktes* $x(t)$ *mit seiner Bahntangente* t_x *deuten*

$$F(t) = DV(a_1, a_3; a_2, t_x).$$

Mit der in [6, S. 177] bewiesenen Deutung der Fundamentalinvarianten $F(t)$ folgt hieraus: *Bei einer Projektivbewegung* $\beta(t)$ *läßt sich bei vorgegebener Polkonfiguration die* (j)-*Bahnprojektivnormale eines allgemeinen Bahnkurvenpunktes konstruieren, sofern die Bahntangente und die beiden anderen Bahnprojektivnormalen bekannt sind.*

5. Als (j)-*Kreispunktkurve 1. Art* $K_{1j}(t)$ wird man den Punktort jener Bahnkurvenpunkte bezeichnen, deren kinematischer (j)-Schmiegkegelschnitt die Bahnkurve an der betrachteten Parameterstelle hyperoskuliert*). Für die *pseudoeuklidische Ähnlichkeitskinematik* ist dies die gewohnte Bezeichnungsweise [4]. Der Gleichung (6) entnimmt man die Darstellung von $K_{1j}(t)$ zu

$$(10) \qquad \begin{aligned} &2\det(x, \dot{x}, p_i)\det(x, \dot{x}, p_k)\{3\sigma_j \det(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \det(x, \dot{x}, \dddot{x})\} + 3\det(x, \dot{x}, \ddot{x}) \\ &\quad \{\det(x, \dot{x}, p_k)\det(x, p_i, \ddot{x}) + \det(x, \dot{x}, p_i)\det(x, p_k, \ddot{x})\} = 0, \end{aligned}$$

was sich ($x^1 x^2 x^3 \neq 0$) noch durch den Faktor x^j kürzen läßt. *Die* (j)-*Kreispunktkurve 1. Art ist* somit i. a. *eine algebraische Kurve 6. Ordnung durch die drei Momentan-*

pole. Daß ihr eine geometrische Bedeutung zukommt, folgt auch aus ihrem Verhalten gegenüber *Parametertransformationen* der Projektivbewegung $\beta(t)$

$$t = f(t^*), \quad \frac{dt^*}{dt} =: \varphi(t), \quad A := \frac{1}{2}\frac{\dot\varphi}{\varphi}, \tag{11}$$

wobei wir uns die Normierung der Bewegung $\beta(t)$ unabhängig von der Parameterverteilung denken [3]. Dann gilt [2]

$$\mathring{x}^* = \varphi^{-1}\mathring{x}, \quad \mathring{\mathring{x}}^* = \varphi^{-2}(\mathring{\mathring{x}} - 2A\mathring{x}), \quad \mathring{\mathring{\mathring{x}}}^* = \varphi^{-3}(\mathring{\mathring{\mathring{x}}} - 6A\mathring{\mathring{x}} + 8A^2\mathring{x} - 2\dot{A}\mathring{x}),$$

so daß sich die geometrische Bedeutung der (j)-Kreispunktkurve 1. Art durch die *Halbinvarianz gegenüber Parametertransformationen* (11) ausdrückt:

$$K^*_{1j}(t^*) = \varphi^{-6}K_{1j}(t).$$

Für die lokalen Koordinaten z_l des (j)-Krümmungsmittelpunktes 1. Art findet man

$$z_0 = \alpha(\sigma_j - \alpha) - \beta, \quad z_1 = -(\sigma_j - \alpha), \quad z_2 = 1$$

mit den Abkürzungen

$$2(\alpha - \sigma_j) := \frac{C_i B_k + C_k B_i}{C_i C_k}, \quad \beta := -\frac{B_i B_k}{C_i C_k} + 2\frac{B_i A_k - B_k A_i}{C_i B_k - C_k B_i}.$$

Wegen (9) und (10) folgt damit der verallgemeinerte [5, S. 42] Satz von *Lochs*: *Bei einer Projektivbewegung* β *ist die* (j)-*Kreispunktkurve 1. Art der Ort jener Punkte, in denen die* (j)-*Bahnnormale mit der* (j)-*Bahnprojektivnormalen zusammenfällt.*

*) Der analoge Scheitelpunktort in der Krümmungstheorie 2. Art wurde in [6, S. 227f.] untersucht.

Literatur

[1] *Bereis, R.:* Über die Bahnaffinnormalen bei der Bewegung eines starren ebenen Systems, Maschinenbautechnik (Getriebetechnik) *13* (1964) 51—56, 76—78.

[2] *Bol, G.:* Projektive Differentialgeometrie I, Göttingen 1950.

[3] *Frank, H.:* Ebene projektive Kinematik. Diss. Karlsruhe 1968.

[4] *Krause, M.:* Analysis der ebenen Bewegung, Leipzig 1920.

[5] *Lochs, G.:* Die Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven bei einer ebenen Bewegung, Mh. Math. Phys. *38* (1931) 39—52.

[6] *Tölke, J.:* Ebene projektive Kinematik I, II, III, Math. Nachr. *63* (1974) 167—185, 187—196; *68* (1975) 221—237.